Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar.
Bd. LVII. 1914—1915. Afd. A. N:o 4.

Zur Elektrizitäts- und Gravitationstheorie

von

GUNNAR NORDSTRÖM.

In einer früheren Mitteilung [1]) habe ich gezeigt, wie man die Gravitationsglechungen und die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes symmetrisch zusammenfassen kann, wenn man die vierdimensionale Raum-Zeitwelt als eine durch eine fünfdimensionale Welterweiterung [2]) gelegte Fläche auffasst. Die zitierte Mitteilung bezog sich wesentlich auf das Feld im leeren Raum und es wurden demnach die rechten Seiten der Gleichungen (I) nicht näher betrachtet. Auch wurde zwischen Feldstärke und Erregung kein Unterschied gemacht, da ja diese beiden Begriffe im leeren Raum zusammenfallen. In der vorliegenden Mitteilung sollen diese Einschränkungen aufgehoben werden, und es soll besonders gezeigt werden, wie die rechten Seiten der Hauptgleichungen (I) geschrieben werden sollen, um der von mir früher entwickelten Gravitationstheorie zu entsprechen.

Im allgemeinen Falle wird das Feld durch zwei Zehnervektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F}$ charakterisiert, die im leeren Raum identisch sind und deren gegenseitiger Zusammenhang in den Punkten der Materie durch gewisse »Zusatzbedingungen» gegeben ist. Die beiden Hauptgleichungssysteme [3]) (I)

[1]) G. Nordström, Phys. Zeitschr. 15, p. 375, 1914.

[2]) Den Ausdruck Welterweiterung entnehme ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn Prof. A. Sommerfeld.

[3]) Die 15 Hauptgleichungen sind natürlich nicht alle voneinander un-

und (II) des Feldes lauten, wenn anstatt $^1/_c\,\mathfrak{k}$ in der früheren Mitteilung jetzt $\mathfrak{s}$ eingeführ wird,

$$
\text{(I)}\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{f}_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{xz}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{xu}}{\partial u}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{xw}}{\partial w}=\mathfrak{s}_x,\\
&\frac{\partial \mathfrak{f}_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{yz}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{yu}}{\partial u}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{yw}}{\partial w}=\mathfrak{s}_y,\\
&\frac{\partial \mathfrak{f}_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{zu}}{\partial u}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{zw}}{\partial w}=\mathfrak{s}_z,\\
&\frac{\partial \mathfrak{f}_{ux}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{uy}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{uz}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{uw}}{\partial w}=\mathfrak{s}_u,\\
&\frac{\partial \mathfrak{f}_{wx}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{wy}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{wz}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{f}_{wu}}{\partial u}\qquad\mathfrak{s}_w;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\text{(II)}\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathfrak{F}_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{xy}}{\partial z}=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{F}_{zu}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{uy}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{yz}}{\partial u}=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{F}_{xu}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{uz}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{zx}}{\partial u}=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{F}_{yu}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{ux}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{xy}}{\partial u}=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{F}_{zw}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{wy}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{yz}}{\partial w}=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{F}_{xw}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{wz}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{zx}}{\partial w}=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{F}_{yw}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{wx}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{xy}}{\partial w}=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{F}_{uw}}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{wx}}{\partial u}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{xu}}{\partial w}=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{F}_{uw}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{wy}}{\partial u}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{yu}}{\partial w}=0,\\
&\frac{\partial \mathfrak{F}_{uw}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{wz}}{\partial u}+\frac{\partial \mathfrak{F}_{zu}}{\partial w}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

abhängig. Von den Gleichungen (I) sind 4 voneinander unabhängig, von den Gleichungen (II) sind es 6.

Der Zehnervektor $\mathfrak{F}$ lässt sich aus dem Fünferpotential Φ ableiten, gemäss den 10 Gleichungen:

$$\mathfrak{F}_{mn} = \frac{\partial \Phi_n}{\partial m} - \frac{\partial \Phi_m}{\partial n}. \tag{1}$$

Wir wenden uns zunächst zu den rechten Seiten der Gleichungen (I), also zu den Komponenten des Fünferstroms. In der Gravitationstheorie, der wir uns anschliessen wollen [1]), wird die Massendiente durch den vierdimensionalen, elastisch-materiellen Tensor **T** bestimmt. Der fünfdimensionalen Auffassung gemäss ist dieser Tensor durch Komponenten

$$\mathbf{T}_{wx}, \; \mathbf{T}_{wy}, \; \mathbf{T}_{wz}, \; \mathbf{T}_{wu}, \; \mathbf{T}_{ww}$$

zu einem fünfdimensionalen Tensor zu erweitern. Durch den erweiterten Tensor **T** und das Fünferpotential Φ ist der Fünferstrom $\mathfrak{s}$ auszudrücken. Es wird sich aber zeigen, dass es zweckmässig ist, anstatt **T** einen neuen fünfdimensionalen Tensor **S** einzuführen, dessen Schubkomponenten mit denen von **T** übereinstimmen, indem

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{S}_{xx} &= \mathbf{T}_{xx} - (\mathbf{T}_{xx} + \mathbf{T}_{yy} + \mathbf{T}_{zz} + \mathbf{T}_{uu} + \mathbf{T}_{ww}) \\ &= -(\mathbf{T}_{yy} + \mathbf{T}_{zz} + \mathbf{T}_{uu} + \mathbf{T}_{ww}) \\ &\text{usw.} \\ \mathbf{S}_{xy} &= \mathbf{T}_{xy} \quad \text{usw.} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Wir werden finden, dass wir zu der von mir entwickelten **Gravitationstheorie** kommen, wenn wir für den Fünfer**strom schreiben:**

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{s}_x &= -\frac{\mathbf{S}_{xx}\mathfrak{n}_x + \mathbf{S}_{xy}\mathfrak{n}_y + \mathbf{S}_{xz}\mathfrak{n}_z + \mathbf{S}_{xu}\mathfrak{n}_u + \mathbf{S}_{xw}\mathfrak{n}_w}{\Phi_x\mathfrak{n}_x + \Phi_y\mathfrak{n}_y + \Phi_z\mathfrak{n}_z + \Phi_u\mathfrak{n}_u + \Phi_w\mathfrak{n}_w}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{s}_w &= -\frac{\mathbf{S}_{wx}\mathfrak{n}_x + \mathbf{S}_{wy}\mathfrak{n}_y + \mathbf{S}_{wz}\mathfrak{n}_z + \mathbf{S}_{wu}\mathfrak{n}_u + \mathbf{S}_{ww}\mathfrak{n}_w}{\Phi_x\mathfrak{n}_x + \Phi_y\mathfrak{n}_y + \Phi_z\mathfrak{n}_z + \Phi_u\mathfrak{n}_u + \Phi_w\mathfrak{n}_w}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

[1]) G. Nordström, Ann. d. Phys. **42**, p. 533, 1913.

wo $\mathfrak{n}$ ein noch zu besprechender Fünfervektor ist. Um genau zu der erwähnten Gravitationstheorie zu kommen, haben wir unter $\mathfrak{n}$ einen Vektor zu verstehen, welcher in den Punkten der vierdimensionalen Weltfläche zu dieser Fläche senkrecht steht, und also für die Lage derselben massgebend ist. Weiter haben wir die Weltfläche als eben anzunehmen, und die Ableitungen sämtlicher Feldgrössen in der Richtung von $\mathfrak{n}$ gleich null zu setzen. Um einzusehen, dass diese Annahmen zu dem gewünschten Ziel führen, wählen wir die Richtung von $\mathfrak{n}$ als w-Richtung. Die letzte Gleichung (3) gibt ja dann

$$\mathfrak{s}_w = -\frac{\mathsf{S}_w}{\Phi_w} = \frac{1}{\Phi_w}(\mathsf{T}_{xx} + \mathsf{T}_{yy} + \mathsf{T}_{zz} + \mathsf{T}_{uu}), \tag{3 a}$$

und es ist also $-\mathfrak{s}_w$ gleich der Ruhdichte $g\nu$ der gravitierende Masse [1]). Die Gleichungen (I) und (II) geben nun, wenn $\mathfrak{F}_{wx} = \mathfrak{f}_{wx}$ usw. gesetzt wird, unmittelbar die Grundgleichungen meiner Gravitationstheorie.

Wir haben gesehen, dass die Komponente von $\mathfrak{s}$ senkrecht zur Weltfläche die gravitierende Masse angibt. Bei beliebiger Wahl des Bezugssystemes hat man

$$g\nu = -\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{n}^2}}(\mathfrak{n}_x \mathfrak{s}_x + \mathfrak{n}_y \mathfrak{s}_y + \mathfrak{n}_z \mathfrak{s}_z + \mathfrak{n}_u \mathfrak{s}_u + \mathfrak{n}_w \mathfrak{s}_w), \tag{4}$$

wo

$$\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}_x^2 + \mathfrak{n}_y^2 + \mathfrak{n}_z^2 + \mathfrak{n}_u^2 + \mathfrak{n}_w^2. \tag{5}$$

Der übrige — also in der Weltfläche liegende — Teil des Vektors $\mathfrak{s}$ gibt den elektrischen Viererstrom an. Für seine Komponenten gelten die Ausdrücke

$$\mathfrak{s}_x^e = \mathfrak{s}_x - \frac{\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{n}^2}(\mathfrak{n}_x \mathfrak{s}_x + \mathfrak{n}_y \mathfrak{s}_y + \mathfrak{n}_z \mathfrak{s}_z + \mathfrak{n}_u \mathfrak{s}_u + \mathfrak{n}_w \mathfrak{s}_w) \tag{6}$$

usw.

Wenn wir Leitungsströme ausschliessen, gibt der absolute Betrag des Vektors $\mathfrak{s}^e$ mit $-i$ multipliziert die Ruhdichte ϱ_0 der Elektrizität,

[1]) G. Nordström, Ann. d. Phys. 42, p. 537, 1913.

$$\varrho_0 = -i \sqrt{\mathfrak{s}_x^{e2} + \mathfrak{s}_y^{e2} + \mathfrak{s}_z^{e2} + \mathfrak{s}_u^{e2} + \mathfrak{s}_w^{e2}}. \tag{7}$$

Weiter bestimmt $\mathfrak{s}^e$ den Bewegungsvektor (die Vierergeschwindigkeit) $\mathfrak{V}$ nach den Gleichungen

$$\frac{1}{c}\mathfrak{V}_x = \frac{\mathfrak{s}_x^e}{\varrho^0}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{c}\mathfrak{V}_w = \frac{\mathfrak{s}_w^e}{\varrho_0}. \tag{8}$$

c ist die Lichtgeschwindigkeit.

Wenn man als w-Richtung die Normalrichtung der Weltfläche wählt, erhält man speziell

$$\mathfrak{s}_w^e = 0, \quad \mathfrak{V}_w = 0,$$

$$\varrho_0 = -\frac{i}{\Phi_w} \sqrt{\mathbf{S}_{xw}^2 + \mathbf{S}_{yw}^2 + \mathbf{S}_{zw}^2 + \mathbf{S}_{uw}^2}, \tag{7 a}$$

$$\mathfrak{s}_x^e = \frac{1}{c}\mathfrak{V}_x \varrho_0 = -\frac{\mathbf{S}_{xw}}{\Phi_w} \tag{8 a}$$

usw.

Wir wollen nun zur Behandlung der Fragen übergehen, die mit der Verschiedenheit der beiden Zehnervektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F}$ zusammenhängen. Zuerst haben wir aber einige algebraische Vektoroperationen zu erwähnen.

Aus einem Fünfervektor ($\mathfrak{A}$) und einem Zehnervektor ($\mathfrak{B}$) kann man durch Multiplikation sowohl einen Fünfervektor wie einen Zehnervektor bilden. Der Fünfervektor hat die x-Komponente

$$\mathfrak{C}_x = \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_{xy} + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_{xz} + \mathfrak{A}_u \mathfrak{B}_{xu} + \mathfrak{A}_w \mathfrak{B}_{xw}. \tag{9}$$

Für die übrigen Komponenten gelten natürlich entsprechende Ausdrücke. Der Vektor $\mathfrak{C}$ ist normal zu $\mathfrak{A}$.

Der aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gebildete Zehnervektor hat die xy-Komponente.

$$\mathfrak{D}_{xy} = \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_{uw} + \mathfrak{A}_u \mathfrak{B}_{wz} + \mathfrak{A}_w \mathfrak{B}_{zu}; \tag{10}$$

die übrigen Komponenten erhält man durch Vertauschen der Indizes. Bei der Bildung z. B. der yu-Komponente

$$\mathfrak{D}_{yu} = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_{wz} + \mathfrak{A}_w \mathfrak{B}_{zx} + \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_{xw}$$

hat man zu bemerken, dass die Reihenfolge $yuxwz$ (sowie $yuwzx$ und $yuzxw$) aus der Reihenfolge $xyzuw$ durch eine gerade Anzahl Permutationen der Elemente entsteht. Der durch die Operation (10) gebildete Zehnervektor ist mit dem ursprünglichen nicht gleichartig, sondern von demselben in ähnlicher Weise unterschieden, wie in der dreidimensionalen Vektoranalysis ein achsialer Vektor von einem polarem.

Aus zwei Fünfervektoren kann man durch Multiplikation einen Zehnervektor und einen Skalar bilden. Der Zehnervektor hat die Komponenten

$$\mathfrak{P}_x \mathfrak{Q}_y - \mathfrak{P}_y \mathfrak{Q}_x \text{ usw.;} \tag{11}$$

der Skalar ist

$$\mathfrak{P}_x \mathfrak{Q}_x + \mathfrak{P}_y \mathfrak{Q}_y + \mathfrak{P}_z \mathfrak{Q}_z + \mathfrak{P}_u \mathfrak{Q}_u + \mathfrak{P}_w \mathfrak{Q}_w. \tag{12}$$

Wenn man die Operation (9) mit den Vektoren $-\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{n}^2}}\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{f}$ (oder $\mathfrak{F}$) vornimmt, erhält man einen Fünfervektor, welcher in der Weltfläche liegt und sich nur auf das Gravitationsfeld bezieht. Dieser Gravitationsvektor hat die x-Komponente

$$-\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{n}^2}}(\mathfrak{n}_y \mathfrak{f}_{xy} + \mathfrak{n}_z \mathfrak{f}_{xz} + \mathfrak{n}_u \mathfrak{f}_{xu} + \mathfrak{n}_w \mathfrak{f}_{xw}); \tag{13}$$

wählt man die Richtung von $\mathfrak{n}$ zur w-Richtung, wird der Ausdruck gleich $\mathfrak{f}_{wx}$.

Durch zweimalige Wiederholung der Operation (10) mit den Vektoren $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{n}^2}}\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{f}$ erhält man einen Zehnervektor, der sich nur auf das elektromagnetische Feld bezieht, und dessen Komponenten in Ebenen, welche die $\mathfrak{n}$-Richtung enthalten, null sind.

Wenn wir das Feld in materiellen Körpern betrachten, haben wir, wie gesagt, zwischen den beiden Zehnervektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F}$ zu unterscheiden. Wie sind nun die Zusatzbedingungen, die den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F}$ ausdrücken, zu formulieren? Diese Formulierung soll natürlich eine Erweiterung der betreffenden Gleichungen sein, die Minkowski für das elektromagnetische Feld gegeben hat[1]. Es ist aber durch verschiedene Annahmen möglich dies zu erzielen.

Da es, wie oben gezeigt, möglich ist, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld voneinander zu trennen, kann man die Zusatzbedingungen für diesen beiden Teile des Gesamtfeldes unabhängig von einander feststellen. Man kann z. B. für das Gravitationsfeld 5 Gleichungen folgender Form annehmen (von welchen doch nur vier voneinander unabhängig sind):

$$(14) \qquad \begin{aligned} & \mathfrak{n}_y \mathfrak{f}_{xy} + \mathfrak{n}_z \mathfrak{f}_{xz} + \mathfrak{n}_u \mathfrak{f}_{xu} + \mathfrak{n}_w \mathfrak{f}_{xw} = \\ & = \alpha (\mathfrak{n}_y \mathfrak{F}_{xy} + \mathfrak{n}_z \mathfrak{F}_{xz} + \mathfrak{n}_u \mathfrak{F}_{xu} + \mathfrak{n}_w \mathfrak{F}_{xw}). \end{aligned}$$

α ist hierbei eine der Dielektrizitätskonstante und der magnetischen Permeabilität analoge Grösse, die für den leeren Raum den Wert 1 hat. Am einfachsten nimmt man α auch in den materiellen Körpern gleich eins an. Wenn man die Bedingungen (14) für das Gravitationsfeld annimmt, ist es nicht ganz einfach die Minkowskischen Zusatzbedingungen für das elektromagnetische Feld durch fünfdimensionale Gleichungen auszudrücken, und wir wollen es hier nicht tun.

Man kann aber anstatt (14) andere Bedingungen annehmen, zu deren Formulierung man die Operationen (9) und (10) auf die Vektoren $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F}$ vorzunehmen hat. Die Bedingungen bilden zwei Systeme, das eine aus fünf, das andere aus zehn Gleichungen bestehend. Wir schreiben wegen Raumersparnis für jedes System nur zwei Gleichungen auf:

---

[1]) H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908, p. 85 und 86 Gleichungen $\{C\}$ und $\{D\}$.

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{B}_y \mathfrak{f}_{xy} + \mathfrak{B}_z \mathfrak{f}_{xz} + \mathfrak{B}_u \mathfrak{f}_{xu} + \mathfrak{B}_w \mathfrak{f}_{xw} = \\
&\varepsilon (\mathfrak{B}_y \mathfrak{F}_{xy} + \mathfrak{B}_z \mathfrak{F}_{xz} + \mathfrak{B}_u \mathfrak{F}_{xu} + \mathfrak{B}_w \mathfrak{F}_{xw}), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\mathfrak{B}_x \mathfrak{f}_{wx} + \mathfrak{B}_y \mathfrak{f}_{wy} + \mathfrak{B}_z \mathfrak{f}_{wz} + \mathfrak{B}_u \mathfrak{f}_{wu} = \\
&\varepsilon (\mathfrak{B}_x \mathfrak{F}_{wx} + \mathfrak{B}_y \mathfrak{F}_{wy} + \mathfrak{B}_z \mathfrak{F}_{wz} + \mathfrak{B}_u \mathfrak{F}_{wu}),
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{B}_z \mathfrak{F}_{uw} + \mathfrak{B}_u \mathfrak{F}_{wz} + \mathfrak{B}_w \mathfrak{F}_{zu} = \mu (\mathfrak{B}_z \mathfrak{f}_{uw} + \mathfrak{B}_u \mathfrak{f}_{wz} + \mathfrak{B}_w \mathfrak{f}_{zu}), \\
&\mathfrak{B}_y \mathfrak{F}_{zu} + \mathfrak{B}_z \mathfrak{F}_{uy} + \mathfrak{B}_u \mathfrak{F}_{yz} = \mu (\mathfrak{B}_y \mathfrak{f}_{zu} + \mathfrak{B}_z \mathfrak{f}_{uy} + \mathfrak{B}_u \mathfrak{f}_{yz}).
\end{aligned}
\right.
$$

Nach diesen Gleichungen würden die Zusatzbedingungen für das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld — im Gegensatz zu dem Verhältnis nach den Gleichungen (14) — nicht voneinander unabhängig sein. Die Dielektrizitätskonstante ε und die magnetische Permeabilitet μ würden auch auf das Gravitationsfeld wirken; jedoch würde ε nur bei bewegten Körpern und nichtstationären Feldern eine Rolle spielen.

Es ist zu zeigen, dass die Gleichungen (15), (16) die Minkowskischen Zusatzbedingungen in sich schliessen, und das geschicht leicht, indem man die Normalrichtung der Weltfläche zu w-Richtung wählt, so dass $\mathfrak{B}_w = 0$ wird. Noch ist zu zeigen, dass die 15 Gleichungen (15), (16) keinen inneren Widerspruch enthalten. Zu diesem Zweck spezialisiert man das Bezugssystem noch weiter, so dass $\mathfrak{B}_x = \mathfrak{B}_y = \mathfrak{B}_z = 0$ (man transformiert auf Ruhe). Dann verknüpfen die Gleichungen jede Komponente von $\mathfrak{f}$ mit der entsprechenden von $\mathfrak{F}$, und es kann kein innerer Widerspruch vorhanden sein, da jede Komponente nur einmal vorkommt.

Wie hervorgehoben, kann man für das Gravitationsfeld verschiedene Zusatzbedingungen annehmen. Es fragt sich aber, ob die Gültigkeit des Einsteinschen Äquivalenzsatzes von diesen Bedingungen abhängig ist. Wir wollen zeigen, dass dieser Satz ganz allgemein gilt, wie man die Zusatzbedingungen auch wählt.

In dem wir die Normalrichtung der Weltfläche zu w-Richtung wählen, können wir ja

$$\mathfrak{f}_{wx}=\mathfrak{f}_x \text{ usw., } \mathfrak{F}_{wx}=\mathfrak{F}_x \text{ usw.}$$

schreiben, und es sind $\mathfrak{f}_x, \ldots \mathfrak{f}_u, \mathfrak{F}_x, \ldots \mathfrak{F}_u$ die Komponenten zweier Vierervektoren in der Weltfläche. Alle Ableitungen nach w sind gleich null angenommen, und wir betrachten die Verhältnisse nur im vierdimensionalen. Die Gravitationsgleichungen lauten, wenn wir anstatt Φ_w einfach Φ schreiben,

$$\frac{\partial \mathfrak{f}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{f}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{f}_z}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{f}_u}{\partial u}=-g(\Phi)\cdot \nu, \tag{17}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathfrak{f}_y}{\partial x}=\dfrac{\partial \mathfrak{f}_x}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial \mathfrak{f}_z}{\partial y}=\dfrac{\partial \mathfrak{f}_y}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial \mathfrak{f}_x}{\partial z}=\dfrac{\partial \mathfrak{f}_z}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{f}_u}{\partial x}=\dfrac{\partial \mathfrak{f}_x}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial \mathfrak{f}_u}{\partial y}=\dfrac{\partial \mathfrak{f}_y}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial \mathfrak{f}_u}{\partial z}=\dfrac{\partial \mathfrak{f}_z}{\partial u}. \end{array}\right. \tag{18}$$

Der Vektor $\mathfrak{F}$ leitet sich aus dem skalaren Gravitationspotential Φ ab;

$$\mathfrak{F}_x=-\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{F}_y=-\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{F}_z=-\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \mathfrak{F}_u=-\frac{\partial \Phi}{\partial u}. \tag{19}$$

Das Gravitationspotential Φ ist das retardierte Potential der freien gravitierenden Masse, deren Dichte φ durch die Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{F}_u}{\partial u}=-\varphi \tag{20}$$

gegeben ist. Man hat also

$$\Phi=-\frac{1}{4\pi}\int \frac{dv}{r}\, \varphi_{\left(t-\frac{r}{c}\right)}+\Phi_a, \tag{21}$$

wo Φ_a den Wert von Φ im Unendlichen bedeutet.

Die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{K}$, die das Gravitationsfeld ausübt, wird durch einen Tensor $\mathbf{G}$ ausgedrückt:

$$\mathfrak{K}_x = -\left\{\frac{\partial \mathbf{G}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{G}_{xu}}{\partial u}\right\} \text{ usw.} \tag{22}$$

Für die Diagonalkomponenten des Tensors gelten Ausdrücke [1])

$$\mathbf{G}_{xx} = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{f}_x \mathfrak{F}_x - \mathfrak{f}_y \mathfrak{F}_y - \mathfrak{f}_z \mathfrak{F}_z - \mathfrak{f}_{\bar{u}} \mathfrak{F}_u\right\} \text{ usw.} \tag{23}$$

Die Ausdrücke für die Schubkomponenten haben für das folgende keine Bedeutung.

Wie in Ann. d. Phys. 42, p. 535 betrachten wir ein »vollständiges, stationäres System» und wählen das Bezugssystem so, dass das Gravitationsfeld statisch ist. Weil dann $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0$, hat man für die Diagonalsumme des Gravitationstensors den Ausdruck

$$\mathfrak{f}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathfrak{f}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathfrak{f}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

und wenn wir genau so wie in Ann. d. Phys. 42, p. 536 verfahren, erhalten wir nach dem Laueschen Satz

$$\int\left\{-D + \mathfrak{f}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathfrak{f}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathfrak{f}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right\} dv =$$
$$= \int\left\{\mathbf{T}_{uu} + \mathbf{G}_{uu} + \mathbf{L}_{uu}\right\} dv = -E_0.$$

---

[1]) Im kombinierten elektromagnetischen und Gravitationsfelde hat man für den kombinierten fünfdimensionalen Feldtensor

$$\mathbf{G}_{xx} = \frac{1}{2}\left\{\mathfrak{f}_{xy}\mathfrak{F}_{xy} + \mathfrak{f}_{xz}\mathfrak{F}_{xz} + \mathfrak{f}_{xu}\mathfrak{F}_{xu} + \mathfrak{f}_{xw}\mathfrak{F}_{xw} - \mathfrak{f}_{yz}\mathfrak{F}_{yz} - \mathfrak{f}_{yu}\mathfrak{F}_{yu} - \mathfrak{f}_{zu}\mathfrak{F}_{zu} - \right.$$
$$\left. - \mathfrak{f}_{yw}\mathfrak{F}_{yw} - \mathfrak{f}_{zw}\mathfrak{F}_{zw} - \mathfrak{f}_{uw}\mathfrak{F}_{uw}\right\} \text{ usw.}$$

$-D$ ist die Diagonalsumme $\mathsf{T}_{xx}+\mathsf{T}_{yy}+\mathsf{T}_{zz}+\mathsf{T}_{uu}$ des elastisch-materiellen Tensors T, E_0 die Ruhenergie des Systems.

Weil in unserem Falle $\frac{\partial \mathfrak{f}_u}{\partial u}=0$, haben wir

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi\mathfrak{f}_x+\frac{\partial}{\partial y}\Phi\mathfrak{f}_y+\frac{\partial}{\partial z}\Phi\mathfrak{f}_z=$$

$$=-\Phi\cdot g(\Phi)\cdot\nu+\mathfrak{f}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\mathfrak{f}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\mathfrak{f}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

und erhalten durch Integration über den ganzen xyz-Raum und Anwendung des Gaussschen Satzes

$$\int\left\{\mathfrak{f}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\mathfrak{f}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\mathfrak{f}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\}dv=\int(\Phi-\Phi_a)g(\Phi)\nu dv.$$

Unsere Gleichungen geben nun für die träge Masse $m=\frac{1}{c^2}E_0$ des Systems den ehemaligen Ausdruck

$$m=\frac{1}{c^2}\int\{D-(\Phi-\Phi_a)g(\Phi)\nu\}\,dv. \tag{24}$$

Hieraus beweist man genau wie in Ann. d. Phys. 42, p. 536 u. 537, dass eine Beziehung

$$g(\Phi_a)m=\int g(\Phi)\nu dv \tag{25}$$

besteht, wenn ν und $g(\Phi)$ durch die Gleichungen

$$\nu=\frac{1}{c^2}D,\ g(\Phi)=\frac{c^2}{\Phi} \tag{26}$$

definiert werden, was ja nach Gleichung (3 a) in Übereinstimmung mit unseren Ansätzen steht.

Die Gleichung (25) drückt den Einsteinschen Äquivalenzsatz aus, unter der Voraussetzung jedoch, dass die gravitierende Masse

$$M_g = \int g(\Phi)\nu dv$$

für die Gravitationswirkungen massgebend ist, die das System ausübt und erfährt. Dass diese Voraussetzung in unserem jetzigen Falle erfüllt ist, fordert einige Erläuterung. Im leeren Raume sind ja $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F}$ einander gleich. Für die absolute Grösse des Feldvektors in entfernten Punkten findet man einen Ausdruck, wenn man den aus (17) folgenden Integralsatz

$$\int \mathfrak{f}_n df = -\int g(\Phi)\nu dv$$

auf eine Kugel anwendet, in deren Mitte das System sich befindet und deren Oberfläche durch den betrachteten entfernten Punkt geht. Weil der Feldvektor in den Punkten der Kugelfläche radial steht, lautet der Ausdruck:

$$|\mathfrak{f}| = |\mathfrak{F}| = \frac{1}{4\pi r^2}\int g(\Phi)\nu dv.$$

In grossen Entfernungen ist, wie man sieht, das von dem System verursachte Gravitationsfeld nur von der gravitierenden Masse des Systems abhängig. Dass auch die gesamte ponderomotorische Kraft, die ein äusseres, homogenes Feld auf das System ausübt, nur von M abhängt, folgt daraus, dass man — weil das Feld statisch ist — die Kraft durch fiktive Spannungen in einer das System einschliessenden und von demselben sehr weitliegenden Fläche darstellen kann. Eine eventuell auf das System wirkende Drehkraft wird dagegen nicht durch M_g bestimmt.

Nach dem jetzt dargelegten, folgt aus Gleichung (25) dass der Einstein sche Äquivalenzsatz in der entwickelten Theorie gültig ist, ganz unabhängig davon, welcher Zusammenhang zwischen den beiden Vektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F}$ besteht. Durch verschiedene Wahl der Zusatzbedingungen erhällt man verschiedene Modifikationen der Gravitationstheorie. Wenn die beiden Vektoren des Gravitationsfeldes einander nicht gleich sind, sind die Gravitationswirkungen gewissermassen vom Zwischenmedium abhängig. Mit der Frage, inwieweit sich diese Verhältnisse experimentell untersuchen lassen, wollen wir uns hier nicht beschäftigen; die Absicht war nur auf die möglichen Modifikationen der Theorie hinzuweisen.

Im Vorstehenden, wie in meinen anderen Mitteilungen auf dem Gebiete der Gravitation, wurde auf diejenigen Fragen gar nicht eingegangen, die mit dem inneren Aufbau der Materie zusammenhängen. In anderer Weise verfährt Herr G. Mie, indem er seine Gravitationstheorie in engstem Zusammenhang mit seiner Theorie der Materie entwickelt [1]. Ich will aber nun auch die Gelegenheit benutzen, um zu bemerken, dass die Ausdrücke (3) für die Komponenten des Fünfervektors $\mathfrak{s}$ für die Aufstellung einer Theorie der Materie Anhaltspunkte geben können. Diese Ausdrücke geben durch Multiplikation mit dem Nenner rechts fünf Gleichungen

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(\mathfrak{s}_x \Phi_x + \mathbf{S}_{xx})\mathfrak{n}_x + (\mathfrak{s}_x \Phi_y + \mathbf{S}_{xy})\mathfrak{n}_y + (\mathfrak{s}_x \Phi_z + \mathbf{S}_{xz})\mathfrak{n}_z + \\
&\qquad + (\mathfrak{s}_x \Phi_u + \mathbf{S}_{xu})\mathfrak{n}_u + (\mathfrak{s}_x \Phi_w + \mathbf{S}_{xw})\mathfrak{n}_w = 0, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&(\mathfrak{s}_w \Phi_x + \mathbf{S}_{wx})\mathfrak{n}_x + (\mathfrak{s}_w \Phi_y + \mathbf{S}_{wy})\mathfrak{n}_y + (\mathfrak{s}_w \Phi_x + \mathbf{S}_{wz})\mathfrak{n}_z + \\
&\qquad + (\mathfrak{s}_w \Phi_u + \mathbf{S}_{wu})\mathfrak{n}_u + (\mathfrak{s}_w \Phi_w + \mathbf{S}_{ww})\mathfrak{n}_w = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Es ist für eine Theorie der Materie naheliegend, einen Ansatz zu machen, der die Komponenten von $\mathbf{S}$ durch die Komponenten der Fünfervektoren $\mathfrak{s}$ und Φ ausdrückt. Dabei ist der Umstand zu berücksichtigen, dass die Determinante der Klammerausdrücke in (27) null sein muss, weil ja sämmtliche Komponenten von $\mathfrak{n}$ nicht null sein können. Der einfachste Ansatz würde lauten:

---

[1]) G. Mie, Ann. d. Phys. **37**, p. 511, 1912; **39**, p. 1, 1912; **40**, p. 1, 1913.

$$(28)\qquad \begin{cases} S_{xx} = -\,\mathfrak{s}_x\,\Phi_x \text{ usw.,} \\ S_{xy} = -\frac{1}{2}(\mathfrak{s}_x\,\Phi_y + \mathfrak{s}_y\,\Phi_x) \text{ usw.}^{1)} \end{cases}$$

Wenn die Komponenten der beiden Fünfervektoren $\mathfrak{s}$ und Φ miteinander proportional sind

$$(28\text{ a})\qquad \frac{\mathfrak{s}_x}{\Phi_x} = \frac{\mathfrak{s}_y}{\Phi_y} = \frac{\mathfrak{s}_z}{\Phi_z} = \frac{\mathfrak{s}_u}{\Phi_u} = \frac{\mathfrak{s}_w}{\Phi_w},$$

befriedigen die Ausdrücke (28) identisch das Gleichungssystem (27). Wenn wir den Ansatz (28) machen, müssen wir auch die erwähnte Proportionalität annehmen, denn sonst würde aus (27) folgen, dass sowohl $\mathfrak{s}$ wie Φ auf $\mathfrak{n}$ senkrecht stehen, was der Wirklichkeit nicht entspricht.

Es mag hier mit diesen Andeutungen über die Möglichkeit einer Theorie der Materie genügen. Ich beabsichtige zu der Frage in einer künftigen Mitteilung zurückzukommen.

Auch in anderen Richtungen bietet die Betrachtungsweise im Fünfdimensionalen Ausblicke über neue Möglichkeiten. Wir haben angenommen, dass die vierdimensionale Weltfläche eben ist, und dass die Ableitungen sämtlicher Grössen in der Richtung senkrecht zu dieser Fläche null sind. Man könnte sich aber denken, diese Annahmen wären in der Wirklichkeit nur angenähert erfüllt. Bei einer Veränderung der Theorie in solcher Richtung hat man wohl vor allem die Forderung zu berücksichtigen, dass die Bedingung der Kausalität in der Weltfläche erfüllt bleibt. Jedenfalls sind mehrfache Modifikationen der Gravitationstheorie denkbar, für welche alle aber unsere fünfdimensionale Gleichungen gelten.

Noch eine mögliche Modifikation anderer Art will ich erwähnen. Von den Komponenten des Fünferpotentials ist

---

[1]) Die Übereinstimmung des Ansatzes mit der Mieschen Theorie ist bemerkenswert, obwohl die beiden Theorien auch manche Verschiedenheiten aufweisen.

in allen praktisch vorkommenden Fällen die Komponente senkrecht zur Weltfläche den übrigen weit überwiegend, und wenn man in den Ausdrücken (3) Φ anstatt n schreibt, verändern sich die Werte dieser Ausdrücke ausserordentlich wenig. Man könnte also, anstatt (3), als Ausdrücke für die Komponenten des Fünferstroms

$$\mathfrak{s}_x = -\frac{\mathbf{S}_{xx}\Phi_x + \mathbf{S}_{xy}\Phi_y + \mathbf{S}_{xz}\Phi_z' + \mathbf{S}_{xu}\Phi_u + \mathbf{S}_{xw}\Phi_w}{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 + \Phi_u^2 + \Phi_w^2}$$

usw. annehmen und so eine etwas veränderte Gravitationstheorie erhalten.

Mit dem Vorstehenden hoffe ich gezeigt zu haben, dass die fünfdimensionale Betrachtungsweise, obwohl ihr zunächst nur eine formale Bedeutung zukommt, doch auch für die Weiterentwickelung der Gravitationstheorie Anhaltspunkte geben kann, die sonst wohl nicht ganz leicht zu finden wären.

Helsingfors, September 1914.