Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar.
Bd. LVII. 1914—1915. Afd. A. N:o 28.

Über eine mögliche Grundlage einer Theorie der Materie.

Von

GUNNAR NORDSTRÖM.

In zwei früheren Mitteilungen [1]) habe ich gezeigt, wie man die Differentialgleichungen des elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes symmetrisch zusammenfassen kann, wenn man die vierdimensionale Raum-Zeitwelt als eine Fläche in einer fünfdimensionalen »Welterweiterung» auffasst. In der letzteren der zitierten Mitteilungen habe ich angedeutet, dass die erwähnte Betrachtungsweise auch bei der Aufstellung einer Theorie der Materie nützlich sein kann; dies näher zu erläutern, ist der Zweck der vorliegenden Mitteilung. Ich will aber sogleich hervorheben, dass es mir nicht gelungen ist die Betrachtungen in gewünschter Weise zum Schluss zu führen.

Im allgemeinen Falle haben wir im Gesamtfelde zwei Zehnervektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F}$ (die eigentlichen Feldvektoren) und zwei Fünfervektoren $\mathfrak{s}$ und Φ (Fünferstrom und Fünferpotential). Zwischen den Komponenten dieser Vektoren gelten die Differentialgleichungen (I), (II), (1) l. c. Weiter gelten zwischen den Vektoren $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F}$ gewisse Zusatz-

[1]) G. Nordström, Phys. Zeitschr. **15**, p. 504, 1914; diese Berichte LVII. 1914—1915. A. N:o 4. Das Zeichen l. c. wird im folgenden den letzteren Aufsatz angeben.

bedingungen, über welche wir verschiedene Annahmen machen können.

Zu den Zustandsgrössen tritt noch der fünfdimensionale Tensor $\mathbf{S}$, welcher in dem von den Gleichungen (2) l. c. angegebenen Zusammenhang mit dem elastisch-materiellen Tensor $\mathbf{T}$ steht. Indem wir uns der von mir in Ann. d. Phys. 42 [1]) entwickelten Gravitationstheorie anschliessen, haben wir uns auf die Gleichungen (27) l. c. zu stützen. $\mathfrak{n}$ ist ein Fünfervektor, welcher die Normalrichtung der Weltfläche angibt. Wir nehmen in diesem Aufsatz diese Normalrichtung als w-Richtung, so dass $\mathfrak{n}_x = \mathfrak{n}_y = \mathfrak{n}_z = \mathfrak{n}_u = 0$, $\mathfrak{n}_w \gtrless 0$. Wir haben dann nach (27) l. c.

$$
\text{(a)} \qquad \begin{cases} \mathbf{S}_{xw} = -\mathfrak{s}_x \Phi_w, \quad \mathbf{S}_{yw} = -\mathfrak{s}_y \Phi_w, \\ \mathbf{S}_{zw} = -\mathfrak{s}_z \Phi_w, \quad \mathbf{S}_{uw} = -\mathfrak{s}_u \Phi_w, \\ \qquad \mathbf{S}_{ww} = -\mathfrak{s}_w \Phi_w. \end{cases}
$$

Wie ich p. 13 l. c. bemerkt habe, ist für eine Theorie der Materie die Annahme naheliegend, dass die Vektoren $\mathfrak{s}$ und Φ [2]) den Tensor $\mathbf{S}$ vollständig bestimmen. Die Gleichungen, welche die Komponenten von $\mathbf{S}$ durch die Komponenten von $\mathfrak{s}$ und Φ ausdrücken, müssen natürlich die Gleichungen (a) enthalten, und deswegen machen wir den folgenden Ansatz:

---

[1]) G. Nordström, Ann. d. Phys. 42, p. 533, 1913.

[2]) Es ist zu bemerken, dass die raumzeitlichen Komponenten von Φ mit den gewöhnlichen elektrodynamischen Potentialen nicht identisch zu sein brauchen, denn wir können nicht behaupten, dass

$$
\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_u}{\partial u}
$$

gleich null ist, wie für die gewöhnlichen elektrodynamischen Potentiale. Für ein statisches Feld hat man aber

$$
\Phi_x = \Phi_y = \Phi_z = 0,
$$

$$
\frac{\partial \Phi_u}{\partial u} = \frac{\partial \Phi_w}{\partial u} = 0,
$$

und deswegen sind in diesem speziellen Falle Φ_u und Φ_w gewöhnliche skalare Potentiale. Ähnlich wie hier liegen diese Verhältnisse in der Mieschen Theorie; vgl. G. Mie, Ann. d. Phys. 37, p. 511, 1912.

$$
\text{(1)} \qquad \begin{cases} \mathbf{S}_{ab} = -\mathfrak{s}_a \Phi_b, \\ \mathbf{S}_{aa} = -\mathfrak{s}_a \Phi_a. \end{cases}
$$

Wenn der fünfdimensionale Tensor $\mathbf{S}$ symmetrisch sein soll, müssen die beiden Fünfervektoren $\mathfrak{s}$ und Φ miteinander parallel sein, so dass

$$
\text{(2 a)} \qquad \mathfrak{s} = \beta \Phi,
$$

wo β ein fünfdimensionaler Skalar von den Dimensionen l^{-2} ist. Wir bemerken aber, dass die raumzeitlichen Komponenten von $\mathbf{S}$ sehr wohl symmetrisch sein können, obwohl

$$
\mathbf{S}_{xw} \gtrless \mathbf{S}_{wx} \text{ usw.}
$$

In diesem Falle würden wir haben

$$
\text{(2)} \qquad \begin{cases} \mathfrak{s}_x = \beta_1 \Phi_x, \quad \mathfrak{s}_y = \beta_1 \Phi_y, \\ \mathfrak{s}_z = \beta_1 \Phi_z, \quad \mathfrak{s}_u = \beta_1 \Phi_u, \\ \qquad \mathfrak{s}_w = \beta_2 \Phi_w, \end{cases}
$$

wo $\beta_1 \gtrless \beta_2$. Die Ungleichheit von β_1 und β_2 ist möglich, weil ja die Richtung senkrecht zur Weltfläche eine ausgezeichnete Richtung ist [1]).

Wir haben nun zu untersuchen was für Bedingungen der Impuls-Energiesatz unserer Theorie auferlegt. Im Fünfdimensionalen wird der Satz durch fünf Gleichungen, eine für jede Achsenrichtung, ausgedrückt. Die Gleichung für die u-Richtung drückt den Energiesatz aus und lautet

$$
\text{(3)} \qquad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mathbf{G}_{xu} + \mathbf{T}_{xu}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\mathbf{G}_{yu} + \mathbf{T}_{yu}\right\} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{\mathbf{G}_{zu} + \mathbf{T}_{zu}\right\} \\ -\frac{\partial}{\partial u}\left\{\mathbf{G}_{uu} + \mathbf{T}_{uu}\right\} - \frac{\partial}{\partial w}\left\{\mathbf{G}_{wu} + \mathbf{T}_{wu}\right\} = 0. \end{cases}
$$

---

[1]) Es würde übrigens auch der Fall möglich sein, dass der Tensor $\mathbf{T}$ symmetrisch, der Tensor $\mathbf{S}$ aber unsymmetrisch sein würde. Dann würden die Gleichungen (2) l. c. so zu verändern sein, dass für die Schubkomponenten

$$
\tfrac{1}{2}(\mathbf{S}_{xy} + \mathbf{S}_{yx}) = \mathbf{T}_{xy} = \mathbf{T}_{yx} \text{ usw.}
$$

gelten würde. Wir wollen indessen an die Gleichheit der Schubkomponenten der beiden Tensoren festhalten.

G ist der Spannungs-Energietensor des vereinigten elektromagnetischen und Gravitationsfeldes, **T** der elastisch-materielle Tensor, welcher durch die Gleichungen (2) l. c. mit dem Tensor **S** zusammenhängt. Durch Addition der fünf Gleichungen (2) l. c. für die Diagonalkomponenten finden wir

$$\sum_a \mathbf{S}_{aa} = -4 \sum_a \mathbf{T}_{aa},$$

und haben also

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathbf{T}_{xx} = \mathbf{S}_{xx} - \frac{1}{4} \sum\limits_a \mathbf{S}_{aa}, \\ \mathbf{T}_{xy} = \mathbf{S}_{xy} \\ \text{usw.} \end{cases}$$

Aus (1) folgt dann

$$(5) \qquad \begin{cases} -\mathbf{T}_{xx} = \mathfrak{s}_x \Phi_x - \frac{1}{4}\{\mathfrak{s}_x \Phi_x + \mathfrak{s}_y \Phi_y + \mathfrak{s}_z \Phi_z + \mathfrak{s}_u \Phi_u + \mathfrak{s}_w \Phi_w\}, \\ -\mathbf{T}_{xy} = \mathfrak{s}_x \Phi_y \ \text{usw.} \end{cases}$$

Um von den Feldgleichungen zum Energiesatz zu gelangen, multiplizieren, wir die drei ersten der Gleichungen (I) l. c. mit $\mathfrak{F}_{ux}$, $\mathfrak{F}_{uy}$, $\mathfrak{F}_{uz}$, die fünfte mit $\mathfrak{F}_{uw}$ und weiter die zweite, dritte, vierte, achte, neunte und zehnte der Gleichungen (II) l. c. mit bzw. $\mathfrak{f}_{yz}$, $\mathfrak{f}_{zx}$, $\mathfrak{f}_{xy}$, $\mathfrak{f}_{wx}$, $\mathfrak{f}_{wy}$, $\mathfrak{f}_{wz}$. Durch Addition der so erhaltenen zehn Gleichungen finden wir nach einiger Umstellung der Terme [1].

$$\mathfrak{F}_{ux}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{xw}}{\partial w}\right) + \mathfrak{F}_{uy}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{yw}}{\partial w}\right)$$

$$+ \mathfrak{F}_{uz}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{zw}}{\partial w}\right) + \mathfrak{F}_{uw}\left(\frac{\partial \mathfrak{f}_{wx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{f}_{wz}}{\partial z}\right)$$

$$+ \mathfrak{f}_{yz}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_{zu}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{uy}}{\partial z}\right) + \mathfrak{f}_{zx}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_{xu}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{uz}}{\partial x}\right)$$

[1]) Vgl. G. Nordström, Phys. Zeitschr. **15**, p. 505, 1914, wo dieselbe Rechnung, für den Fall das $\mathfrak{f} = \mathfrak{F}$ ist, durchgeführt wird.

$$+ \mathfrak{f}_{xy}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_{yu}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{ux}}{\partial y}\right) + \mathfrak{f}_{wx}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_{uw}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{xu}}{\partial w}\right)$$

$$+ \mathfrak{f}_{wy}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_{uw}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{yu}}{\partial w}\right) + \mathfrak{f}_{wz}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}_{uw}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{F}_{zu}}{\partial w}\right)$$

$$+ \mathfrak{F}_{ux}\frac{\partial \mathfrak{f}_{xu}}{\partial u} + \mathfrak{F}_{uy}\frac{\partial \mathfrak{f}_{yu}}{\partial u} + \mathfrak{F}_{uz}\frac{\partial \mathfrak{f}_{zu}}{\partial u} + \mathfrak{F}_{uw}\frac{\partial \mathfrak{f}_{wu}}{\partial u}$$

$$+ \mathfrak{f}_{yz}\frac{\partial \mathfrak{F}_{yz}}{\partial u} + \mathfrak{f}_{zx}\frac{\partial \mathfrak{F}_{zx}}{\partial u} + \mathfrak{f}_{xy}\frac{\partial \mathfrak{F}_{xy}}{\partial u}$$

$$+ \mathfrak{f}_{wx}\frac{\partial \mathfrak{F}_{wx}}{\partial u} + \mathfrak{f}_{wy}\frac{\partial \mathfrak{F}_{wy}}{\partial u} + \mathfrak{f}_{wz}\frac{\partial \mathfrak{F}_{wz}}{\partial u}$$

$$= \mathfrak{F}_{ux}\mathfrak{s}_x + \mathfrak{F}_{uy}\mathfrak{s}_y + \mathfrak{F}_{uz}\mathfrak{s}_z + \mathfrak{F}_{uw}\mathfrak{s}_w.$$

Wir haben nun die Zusatzbedingungen, die $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{F}$ miteinander verknüpfen, zu berücksichtigen. Wenn diese beiden Vektoren nicht einander gleich sein sollen, ist der einfachste Zusammenhang, der zwischen ihnen bestehen kamn

$$(6) \qquad \mathfrak{f} = \varepsilon \mathfrak{F},$$

wo ε ein fünfdimensionaler Skalar, der in irgendeiner Weise von dem physikalischen Zustand abhängt.[1] Weil die w-Richtung eine ausgezeichnete Richtung ist, könnten wir anstatt des fünfdimensionalen Skalars ε zwei Grössen ε_1 und ε_2 haben, so dass

$$\mathfrak{f}_{ab} = \varepsilon_1 \mathfrak{F}_{ab}$$

wenn weder a noch b w bedeutet, wogegen

$$\mathfrak{f}_{wa} = \varepsilon_2 \mathfrak{F}_{wa}.$$

In der Weltfläche würden ε_1 und ε_2 als vierdimensionale Skalare auftreten. Wir wollen im Folgenden an der einfacheren Annahme (6) festhalten, setzen also $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Wir haben dann

$$\mathfrak{f}_{yz}\frac{\partial \mathfrak{F}_{yz}}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{f}_{yz}\mathfrak{F}_{yz}-\frac{1}{2}\mathfrak{F}^2_{yz}\frac{\partial \varepsilon}{\partial u},$$

$$\mathfrak{F}_{ux}\frac{\partial \mathfrak{f}_{xu}}{\partial u}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{f}_{ux}\mathfrak{F}_{ux}+\frac{1}{2}\mathfrak{f}^2_{ux}\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\varepsilon}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{f}_{ux}\mathfrak{F}_{ux}-\frac{1}{2}\mathfrak{F}^2_{ux}\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}$$

usw.

Unsere lange Gleichung erhält nun nach einiger Umformung die Gestalt

$$(7)\quad \begin{cases} -\left\{\dfrac{\partial \mathbf{G}_{xu}}{\partial x}+\dfrac{\partial \mathbf{G}_{yu}}{\partial y}+\dfrac{\partial \mathbf{G}_{zu}}{\partial z}+\dfrac{\partial \mathbf{G}_{wu}}{\partial w}+\dfrac{\partial \mathbf{G}_{uu}}{\partial u}\right\}= \\ =\dfrac{1}{2}\Sigma\mathfrak{F}^2_{ab}\cdot\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial u}+\mathfrak{s}_x\mathfrak{F}_{ux}+\mathfrak{s}_y\mathfrak{F}_{uy}+\mathfrak{s}_z\mathfrak{F}_{uz}+\mathfrak{s}_w\mathfrak{F}_{uw}, \end{cases}$$

worin für die Komponenten des fünfdimensionalen Tensors $\mathbf{G}$ folgende Ausdrücke gelten:

$$(8)\quad \begin{cases} \mathbf{G}_{xu}=\mathfrak{f}_{xy}\mathfrak{F}_{uy}+\mathfrak{f}_{xz}\mathfrak{F}_{uz}+\mathfrak{f}_{xw}\mathfrak{F}_{uw}, \\ \mathbf{G}_{uu}=\dfrac{1}{2}\Big\{\mathfrak{f}_{ux}\mathfrak{F}_{ux}+\mathfrak{f}_{uy}\mathfrak{F}_{uy}+\mathfrak{f}_{uz}\mathfrak{F}_{uz}+\mathfrak{f}_{uw}\mathfrak{F}_{uw} \\ -\mathfrak{f}_{yz}\mathfrak{F}_{yz}-\mathfrak{f}_{zx}\mathfrak{F}_{zx}-\mathfrak{f}_{xy}\mathfrak{F}_{xy}-\mathfrak{f}_{wx}\mathfrak{F}_{wx}-\mathfrak{f}_{wy}\mathfrak{F}_{wy}-\mathfrak{f}_{wz}\mathfrak{F}_{wz}\Big\}. \end{cases}$$

Die Gleichung (7) drückt (mit *ic* multipliziert) den Energiesatz für das vereinigte elektromagnetische und Gravitationsfeld aus. Wir fügen zu ihren beiden Seiten noch die Glieder hinzu, die sich auf das materielle Spannungsfeld beziehen, und erhalten, wenn wir die Ausdrücke (5) für die Komponenten von $\mathbf{T}$ und die Ausdrücke (1) l. c. für die Komponenten von $\mathfrak{F}$ berücksichtigen,

$$(9)\quad \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\mathbf{G}_{xu}+\mathbf{T}_{xu}\right\}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\mathbf{G}_{uy}+\mathbf{T}_{yu}\right\}-\dfrac{\partial}{\partial z}\left\{\mathbf{G}_{zu}+\mathbf{T}_{zu}\right\} \\ -\dfrac{\partial}{\partial w}\left\{\mathbf{G}_{wu}+\mathbf{T}_{wu}\right\}-\dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\mathbf{G}_{uu}+\mathbf{T}_{uu}\right\}= \\ =\dfrac{1}{2}\Sigma\mathfrak{F}^2_{ab}\cdot\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial u}+\mathfrak{s}_x\left\{\dfrac{\partial \Phi_x}{\partial u}-\dfrac{\partial \Phi_u}{\partial x}\right\}+\mathfrak{s}_y\left\{\dfrac{\partial \Phi_y}{\partial u}-\dfrac{\partial \Phi_u}{\partial y}\right\} \\ +\mathfrak{s}_z\left\{\dfrac{\partial \Phi_z}{\partial u}-\dfrac{\partial \Phi_u}{\partial z}\right\}+\mathfrak{s}_w\left\{\dfrac{\partial \Phi_w}{\partial u}-\dfrac{\partial \Phi_u}{\partial w}\right\}+ \\ +\dfrac{\partial}{\partial x}\mathfrak{s}_x\Phi_u+\dfrac{\partial}{\partial y}\mathfrak{s}_y\Phi_u+\dfrac{\partial}{\partial z}\mathfrak{s}_z\Phi_u+\dfrac{\partial}{\partial w}\mathfrak{s}_w\Phi_u+\dfrac{\partial}{\partial u}\mathfrak{s}_u\Phi_u \\ -\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial}{\partial u}\left\{\mathfrak{s}_x\Phi_x+\mathfrak{s}_y\Phi_y+\mathfrak{s}_z\Phi_z+\mathfrak{s}_w\Phi_w+\mathfrak{s}_u\Phi_u\right\}. \end{cases}$$

Die beiden Seiten dieser Gleichung müssen nun dem Energiesatz (3) gemäss gleich null sein, und wenn wir die rechte Seite gleich null setzen, erhalten wir die Bedingung, die der Energiesatz unserer Theorie auferlegt. Wir berücksichtigen weiter, dass

$$\Phi_u\left\{\frac{\partial \mathfrak{s}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{s}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{s}_z}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{s}_w}{\partial w}+\frac{\partial \mathfrak{s}_u}{\partial u}\right\}=0,$$

weil der Ausdruck in der Klammer null ist, was durch Differentiation der Gleichungen (1) l. c. in bezug auf x, y, z, u, w und Addition eingesehen wird. Die rechte Seite von (9) gleich null gesetzt gibt dann

$$\frac{1}{2}\Sigma\mathfrak{F}_{ab}{}^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial u}+\mathfrak{s}_x\frac{\partial \Phi_x}{\partial u}+\mathfrak{s}_y\frac{\partial \Phi_y}{\partial u}+\mathfrak{s}_z\frac{\partial \Phi_z}{\partial u}+\mathfrak{s}_w\frac{\partial \Phi_w}{\partial u}+\mathfrak{s}_u\frac{\partial \Phi_u}{\partial u}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\mathfrak{s}_x\Phi_x+\mathfrak{s}_y\Phi_y+\mathfrak{s}_z\Phi_z+\mathfrak{s}_w\Phi_w+\mathfrak{s}_u\Phi_u\right\}=0.$$

Diese Bedingungsgleichung bezieht sich ja auf die u-Richtung. Die entsprechenden Gleichungen für die übrigen Achsenrichtungen sind von derselben nur dadurch verschieden, dass die Ableitungen in bezug auf eine andere

Koordinate genommen sind. Wir können also sämtliche fünf Gleichungen in die folgende zusammenfassen:

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum \mathfrak{F}_{ab}^2 . d\varepsilon + \mathfrak{s}_x d\Phi_x + \mathfrak{s}_y d\Phi_y + \mathfrak{s}_z d\Phi_z + \mathfrak{s}_u d\Phi_u + \mathfrak{s}_w d\Phi_w \\ &-\frac{1}{4} d(\mathfrak{s}_x \Phi_x + \mathfrak{s}_y \Phi_y + \mathfrak{s}_z \Phi_z + \mathfrak{s}_u \Phi_u + \mathfrak{s}_w \Phi_w) = 0. \end{aligned}\right.$$

Wenn diese Bedingungsgleichung erfüllt ist, gilt also in unserer Theorie der Impuls-Energiesatz [1]). Nehmen wir den durch Gleichung (2 a) angegebenen Zusammenhang zwischen $\mathfrak{s}$ und Φ an, erhalten wir aus (10)

$$\frac{1}{2}\sum \mathfrak{F}_{ab}^2 . d\varepsilon + \frac{1}{2}\beta\, d\sum \Phi_a^2 - \frac{1}{4} d(\beta \sum \Phi_a^2) = 0.$$

Wir setzen

$$(11\,\mathrm{a})\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \sum \Phi_a^2, \\ \eta &= 2\sum \mathfrak{F}_{ab}^2, \end{aligned}\right.$$

und erhalten nach einfacher Umformung die Bedingungsgleichung in der Form

$$(12\,\mathrm{a})\qquad \xi\, d\beta - \beta\, d\xi = \eta\, d\varepsilon.$$

Diese Gleichung gilt ja nur, wenn wir die Beziehung (2 a) annehmen. Nehmen wir dagegen die allgemeinere Beziehung (2) an, haben wir anstatt (12a)

$$(12)\qquad \xi_1 d\beta_1 + \xi_2 d\beta_2 - \beta_1 d\xi_1 - \beta_2 d\xi_2 = \eta\, d\varepsilon,$$

wo

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 + \Phi_u^2, \\ \xi_2 &= \Phi_w^2, \\ \eta &= 2\sum \mathfrak{F}_{ab}^2. \end{aligned}\right.$$

[1]) Ein Vergleich der Ableitung dieser Gleichung (10) mit den entsprechenden Betrachtungen von Mie in Ann. d. Phys. **37**, p. 522 ff. und **40**, p. 29 ff. zeigt meiner Ansicht nach, dass seine Bedingungen nicht die von ihm in Phys. Zeitschr. 15, p. 175 behauptete allgemeine Giltigkeit in jeder Theorie besitzen.

Wir wollen zunächst $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ annehmen und die Gleichung (12 a) untersuchen. Durch Division mit ξ^2 geht sie in die folgende über:

$$d\frac{\beta}{\xi} = \frac{\eta}{\xi^2} d\varepsilon.$$

Um die rechte Seite zu einem vollständigen Differential zu machen, nehmen wir an, dass ε eine Funktion nur von η/ξ^2 ist. Dann wir dauch β/ξ eine Funktion von demselben Argument. Weil ε die Dimensionen einer reinen Zahl hat, multiplizieren wir die Gleichung mit einer universellen Konstante $\varkappa$ von solchen Dimensionen, dass auch

$$\frac{\varkappa\eta}{\xi^2}$$

eine reine Zahl wird. $\varkappa$ hat also die Dimensionen

$$m\, l^3\, t^{-2}$$

also die des Quadrats einer Elektrizitätsmenge. Die Gleichung lautet nun

$$(13)\qquad d\frac{\varkappa\beta}{\xi} = \frac{\varkappa\eta}{\xi^2} d\varepsilon.$$

ε und $\varkappa\beta/\xi$ sind Funktionen von $\varkappa\eta/\xi^2$. Man wird voraussehen, dass, wenn sich unsere Theorie in gewünschter Weise weiterentwickeln lässt, der Konstante $\varkappa$ die wichtige Rolle zukommen wird, das elektrische Elementarquantum $\pm e$ zu bestimmen, was möglich ist, weil $\varkappa$ dieselben Dimensionen wie e^2 hat.

Das Plancksche Wirkungsquantum h steht, wie Einstein bemerkt hat [1]), wahrscheinlich in engstem Zusammenhang mit e und hat dieselben Dimensionen wie

[1]) A. Einstein, Phys. Zeitschr. **10**, p. 192, 1909.

$$\frac{e^2}{c}$$

(wo c die Lichtgeschwindigkeit) also auch dieselben wie $\varkappa/c$. Von einer erfolgreichen Weiterentwickelung unserer Theorie würde man also auch eine Bestimmung von h durch $\varkappa$ und c erhoffen können.

Wir haben jetzt Ausdrücke zu suchen, welche der Bedingung (13) genügen. Ein möglicher und recht plausibler Ansatz ist folgender:

$$(14) \qquad \begin{cases} \varepsilon - \varepsilon_0 = (n+1)\left(\dfrac{\varkappa\eta}{\xi^2}\right)^n, \\ \dfrac{\varkappa\beta}{\xi} = n\left(\dfrac{\varkappa\eta}{\xi^2}\right)^{n+1}. \end{cases}$$

ε_0 ist eine konstante Zahl, n denken wir uns aber zunächst als veränderlich. Wenn wir der Einfachheit halber

$$(15) \qquad \frac{\varkappa\eta}{\xi^2} = \omega$$

setzen, haben wir

$$\omega d\varepsilon = n(n+1)\,\omega^n d\omega + \omega^{n+1} dn + (n+1)\,\omega^{n+1} \ln \omega\, dn,$$
$$d\frac{\varkappa\beta}{\xi} = n(n+1)\,\omega^n d\omega + \omega^{n+1} dn + n\,\omega^{n+1} \ln \omega\, dn.$$

Wir sehen, dass die Bedingung (13) erfüllt ist, wenn in jedem Raum-Zeitgebiet, wo ω weder gleich eins oder gleich null ist, n einen konstanten Wert hat. Wir haben also zwei Möglichkeiten: entweder ist n durchaus unveränderlich oder n verändert sich sprungweise in Flächen, wo $\omega = 1$ oder $\omega = 0$. Wir wollen die Bedeutung dieser beiden Möglichkeiten etwas näher untersuchen.

Wenn n durchaus konstant ist, hat man keinen absolut leeren Raum; wo $\Sigma\mathfrak{F}_{ab}^2$ von null verschieden ist, hat man auch Elektrizität und Materie, obwohl ihre Dichte unmerklich klein sein kann. Der Wert von n muss positiv sein, und weiter hat man $\varepsilon_0 = 1$ zu setzen, weil ja für die verhältnismässig schwachen Felder, die wir in dem uns leer scheinenden Raume untersuchen können, ε praktisch konstant und gleich eins ist, indem

$$(n+1)\left(\frac{\varkappa\eta}{\xi^2}\right)^n \text{ klein gegen } \varepsilon_0 = 1.$$

Nur in den sehr starken interatomistischen Feldern, würde ε von dem Werte 1 erheblicher abweichen, und die Dichte der Elektrizität und Materie würde auch merklich sein.

Mehr lockend als die Annahme eines durchaus konstanten Wertes von n scheint wohl die Annahme, dass n sich für $\omega = 1$ sprungweise verändert und für $\omega < 1$ gleich null ist. Dann hätte man einen prinzipiellen Unterschied zwischen Äther (= leerem Raum) und Materie. Man hätte $\varepsilon_0 = 0$ zu setzen, und, wo $\omega < 1$ ist, hätte man $\varepsilon = \omega^0 = 1$, $\beta = 0$, so dass in diesen Gebieten keine Elektrizität und Materie vorhanden sein würde (vgl. Gleichung (2 a)). Für $\omega > 1$ hätte man einen von null verschiedenen Wert für n anzunehmen, so dass ε vom Werte 1 und β vom Werte 0 abweichen. Für $\omega > 1$ könnte zum Beispiel $n = 1$ oder $n = \frac{1}{2}$ sein.

Um zu untersuchen, inwieweit die gemachten Annahmen für eine Theorie der Materie geeignet sein können, denken wir uns ein elektrisches Teilchen (ein Elektron) von radialer Symmetrie, dessen sämtliche Teile in Ruhe sind. Dann ist

$$(16) \qquad \Phi_x = \Phi_y = \Phi_z = 0.$$

Φ_u und Φ_w sind dagegen Funktionen des Abstandes r vom Zentrum des Teilchens. Wir setzen

$$(17) \qquad \Phi_u = i\,\Phi_e,$$

wo nun Φ_e das reelle, elektrostatische Potential ist. Für die Komponenten von $\mathfrak{F}$ erhalten wir nach (1) l. c., weil sämtliche Ableitungen in bezug auf u null sind,

$$(18)\quad \begin{cases} \mathfrak{F}_{ux} = -i\dfrac{\partial \Phi_e}{\partial x}, \quad \mathfrak{F}_{uy} = -i\dfrac{\partial \Phi_e}{\partial y}, \quad \mathfrak{F}_{uz} = -i\dfrac{\partial \Phi_e}{\partial z}; \\ \mathfrak{F}_{wx} = -\dfrac{\partial \Phi_w}{\partial x}, \quad \mathfrak{F}_{wy} = -\dfrac{\partial \Phi_w}{\partial y}, \quad \mathfrak{F}_{wz} = -\dfrac{\partial \Phi_w}{\partial z}; \\ \mathfrak{F}_{xy} = \mathfrak{F}_{yz} = \mathfrak{F}_{zx} = 0. \end{cases}$$

Die Komponenten von $\mathfrak{f}$ erhalten wir durch Multiplikation mit ε. Aus (16) folgt

$$(19)\quad \mathfrak{s}_x = \mathfrak{s}_y = \mathfrak{s}_z = 0.$$

Weil sämtliche Feldgrössen nur vom Abstand r abhängen, haben wir

$$(20)\quad \begin{cases} \eta = 2\,\Sigma \mathfrak{F}_{ab}{}^2 = 2\left\{\left(\dfrac{d\Phi_w}{dr}\right)^2 - \left(\dfrac{d\Phi_e}{dr}\right)^2\right\}\ ^{1)}, \\ \xi = \Sigma \Phi_a{}^2 = \Phi_w{}^2 - \Phi_e{}^2. \end{cases}$$

Wenn die Dichte der Elektrizität mit ϱ und die Dichte der gravitierenden Masse (l. c. p. 4 mit $g.\nu$ bezeichnet) mit γ bezeichnet wird, hat man allgemein

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{s}_u = i\varrho, \\ \mathfrak{s}_w = -\gamma \end{cases}$$

und also in unseren Falle

$$(22)\quad \begin{cases} \varrho = \beta\Phi_e, \\ \gamma = -\beta\Phi_w. \end{cases}$$

Die zwei letzten der Gleichungen (I) l. c. geben bei Anwendung des Gaussschen Satzes auf eine dünne, kugelformige Schicht

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left\{r^2\varepsilon\,\dfrac{d\Phi_e}{dr}\right\} = -r^2\beta\Phi_e, \\ \dfrac{d}{dr}\left\{r^2\varepsilon\,\dfrac{d\Phi_w}{dr}\right\} = -r^2\beta\Phi_w. \end{cases}$$

[1]) Weil das zweite Glied in der Klammer überwiegt, ist η negativ.

Die übrigen Gleichungen (I) und (II) l. c. sind ohne weiteres erfüllt.

Wenn in (23) die Ausdrücke für ε und β eingeführt werden, erhält man ein System von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, durch welche Φ_e und Φ_w als Funktionen von r bestimmt werden. Als erstes Integral des Gleichungssystems findet man leicht

$$r^2\varepsilon\left\{\Phi_w\frac{d\Phi_e}{dr} - \Phi_e\frac{d\Phi_w}{dr}\right\} = \text{konst.}$$

Die schliesslichen Integralausdrücke für Φ_e und Φ_w sind aber nicht in geschlossener Form zu erhalten. Vier Integrationskonstanten sind zunächst unbestimmt. Zwei derselben werden dadurch erhalten, dass die Werte von Φ_e und Φ_w für $r=\infty$ bekannt sind. Weil positive und negative Elektrizität in gleicher Menge im Weltall vorhanden sein soll, haben wir für $r=\infty$ $\Phi_e=0$ zu setzen. Φ_w hat dagegen für $r=\infty$ den hohen positiven Wert

$$\Phi_{w\infty} = 0{,}984 \,.\, 10^{24}\ \mathrm{g}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{cm}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{sek}^{-1}.$$

Für grosse r sollen wir weiter die folgenden Reihenentwickelungen haben:

$$(24)\quad \begin{cases} \Phi_e = 0 + \dfrac{e}{4\pi r} + \dots \\ \Phi_w = \Phi_{w\infty} - \dfrac{M}{4\pi r} + \dots \end{cases}$$

wo e das elektrische Elementarquantum (mit positivem oder negativem Vorzeichen) und M die gravitierende Masse des Teilchens. e und M sind die beiden übrigen Integrationskonstanten, die auf Grund der entwickelten Theorie nicht bestimmbar sind. Wenn aber diese Grössen willkürlich vorgeschrieben werden können, kann unsere Theorie unmöglich zu einer atomistischen Struktur der Elektrizität und Materie führen. Wir müssen also zu den Grundlagen der Theorie noch neue Festsetzungen hinzufügen. Am zweckmässigsten scheint es, für die Werte der Zustandsgrössen ξ, η in den Mittelpunkten der materiellen Teilchen zwei neue, algebraische Bedingungen vorzuschreiben; (es müsste z. B. in diesen Punkten immer $\xi = 0$, $\eta = 0$ sein). Wir vervollständigen also die Theorie durch die Annahme, dass die Mittelpunkte der Elektronen und Atome singuläre Punkte im Felde sind, in welchen die Zustandsgrössen ganz besondere, für das übrige Feld nicht giltige Bedingungen unterworfen sind [1]). In der Reihenentwickelung (24) für ein ruhendes Teilchen sind dann nicht mehr e und M willkürlich, sondern werden durch ein gewisses System von zwei Gleichungen in ein- oder mehrdeutiger Weise bestimmt. Die Grösse $\varkappa$ wird in das Gleichungssystem eingehen, und so wird ein enger Zusammenhang zwischen $\varkappa$, e^2 und M^2, welche drei Grössen ja dieselben Dimensionen haben, möglich sein.

Obige Betrachtungen stützen sich auf die Beziehung (12 a), welche die Annahme $\beta_1 = \beta_2$ voraussetzt. Wir sehen aber leicht, dass diese Annahme zu Schwierigkeiten führt. Wir haben ja für das betrachtete Teilchen

$$\begin{aligned} e &= \int \varrho \, dV = \int \beta \Phi_e \, dV, \\ M &= \int \gamma \, dV = -\int \beta \Phi_w \, dV. \end{aligned}$$

M ist die gravitierende Masse des Teilchens, welche durch die Beziehung

$$M = \frac{c^2 m}{\Phi_{w\infty}} \tag{25}$$

mit seiner trägen Masse m verknüpft ist [2]). Wenn in allen Punkten des Teilchens ϱ dasselbe Vorzeichen hat, hat ja auch

$$\Phi_e = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\varrho}{l} \, dV$$

dasselbe Vorzeichen wie ϱ, und β muss positiv sein. Da auch M positiv ist, müsste nun Φ_w überwiegend negativ

[1]) Die Weltlinien, die diese Punkte bilden, sind natürlich singuläre Linien in der vierdimensionalen Weltfläche.

[2]) Vgl. G. Nordström, Ann. d. Phys. **42**, p. 537, 1913.

sein. Negative Werte von Φ_w sind sehr gut zu erhalten, wenn genügend grosse gravitierende Massen auf ein genügend kleines Raumgebiet konzentriert sind. Dies bringt aber andere Schwierigkeiten mit sich. Wenn die gravitierende Masse eines Elektrons, die etwa

$$M = 0{,}8 \, . \, 10^{-30} \, g^{\frac{1}{2}} \, cm^{\frac{3}{2}} \, sek^{-1}$$

beträgt, auf einen Kugelraum vom Radius a konzentriert ist hat, man auf der Kugeloberfläche

$$\Phi_w = \Phi_{w\infty} - \frac{M}{4\pi a} \leqq 0, \text{ wenn } a \leqq 6{,}4 \, . \, 10^{-52} \text{ cm}.$$

Würde ein Hauptteil der elektrischen Ladung des Elektrons auf ein so kleines Gebiet konzentriert sein, so würde die Energie des elektrostatischen Feldes von der Grössenordnung

$$\frac{e^2}{8\pi a} = 1{,}7 \, . \, 10^{32} \text{erg}$$

sein und würde zur trägen Masse m einen Beitrag von der Grössenordnung

$$\frac{1}{c^2} \cdot 1{,}7 \, . \, 10^{32} = 1{,}9 \, . \, 10^{11} \text{ g}$$

liefern. Damit m den richtigen Wert von etwa $0{,}87 \, . \, 10^{-27}$ g erhalte, müsste man also innerhalb des Elektrons eine negative Energiedichte von ungeheuer hohem Absolutwert haben, was sehr unwahrscheinlich ist.

Die erwähnten Schwierigkeiten würden kaum geringer sein, wenn im Gegensatz zu dem eben angenommenen ϱ innerhalb des Teilchens das Vorzeichen wechseln würde.

Aus diesen Gründen können wir auch ohne eine Integration der Differentialgleichungen (23) behaupten, dass die auf die Annahme $\beta_1 = \beta_2$ gegründete Theorie aller Wahrscheinlichkeit nach zu richtigen Resultaten nicht führen kann.

Wenn wir die Annahme $\beta_1 = \beta_2$ fallen lassen, liegen die

Verhältnisse beträchtlich günstiger, indem β_1 positiv, β_2 dagegen negativ sein kann, wie die Gleichungen

$$\begin{cases} \varrho = \beta_1 \Phi_e, \\ \gamma = -\beta_2 \Phi_w, \end{cases} \tag{26}$$

(die an Stelle von (22) treten) es wünschenswert machen. Wenn β_1 und β_2 verschiedene Grössen sind, vermehrt sich die Zahl der voneinander unabhängigen Grössen mit eins, und wir können denselben eine neue Bedingung auferlegen. Am wenigsten verändern sich die früher angestellten mathematischen Betrachtungen, wenn wir

$$\beta_1 \xi_1 = \beta_2 \xi_2 \tag{27}$$

setzen. Weil ξ_1 negativ, ξ_2 dagegen positiv ist, sind, wie gewünscht, β_1 und β_2 von entgegengesetztem Vorzeichen. Die Gleichung (27) sagt aus, dass für ein statisches Feld

$$\varrho \Phi_e = \gamma \Phi_w \tag{27 a}$$

ist (vgl. (11), (17) und (26)). Dass $\varrho \Phi_e$ und $\gamma \Phi_w$ unabhängig von unseren Annahmen von derselben Grössenordnung sein sollen, zeigt folgende Überlegung. Wir denken uns die elektrische Ladung e und die gravitierende Masse M des ruhenden Teilchens gleichförmig verteilt über einen Kugelraum vom Radius a. Die Dichten der Elektrizität und der gravitierenden Masse sind dann von den Grössenordnungen

$$(\varrho) = \frac{e}{a^3} \text{ und } (\gamma) = \frac{M}{a^3}.$$

In den Punkten der Kugel ist Φ_e von der Grössenordnung

$$(\Phi_e) = \frac{e}{a}.$$

Wenn a nicht allzu klein ist, ist Φ_w innerhalb der Kugel von derselben Grössenordnung wie im Unendlichen, und nach (25) ist dann die gravitierende Masse M von der Grössenordnung

$$(M) = \frac{c^2 m}{\Phi_w}.$$

Die träge Masse m ist aber nach den üblichen Theorien [1]) von der Grössenordnung

$$(m) = \frac{e^2}{a c^2}.$$

Weil also γ von der Grössenordnung

$$(\gamma) = \frac{e^2}{a^4 \Phi_w}$$

ist, sehen wir, dass nach den üblichen Theorien $\varrho \Phi_e$ und $\gamma \Phi_w$ von derselben Grössenordnung sind, und hierdurch erhält die Annahme (27) eine gewisse Stütze.

Wir wenden uns nun der auf den Ansatz (27) gegründeten allgemeinen Theorie zu. Die Gleichung gibt durch Differentiation

$$\xi_1 d\beta_1 - \beta_2 d\xi_2 = \xi_2 d\beta_2 - \beta_1 d\xi_1,$$

und aus Gleichung (12) p. 8, welche wir ja jetzt den Betrachtungen zugrunde zu legen haben, erhalten wir

$$2\xi_1 d\beta_1 - 2\beta_2 d\xi_2 = 2\xi_2 d\beta_2 - 2\beta_1 d\xi_1 = \eta\, d\varepsilon.$$

Durch Division mit $2\xi_1\xi_2$ bekommen wir, weil

$$\frac{\beta_1}{\xi_2} = \frac{\beta_2}{\xi_1},$$

$$\frac{d\beta_1}{\xi_2} - \frac{\beta_1 d\xi_2}{\xi_2^2} = \frac{d\beta_2}{\xi_1} - \frac{\beta_2 d\xi_1}{\xi_1^2} = \frac{\eta}{2\xi_1\xi_2} d\varepsilon,$$

und anstatt (13) erhalten wir die beiden Gleichungen

[1]) Vgl. z. B. M. Abraham, Theorie der Elektrizität II, p. 192 (Leipzig, 1905).

$$(28)\qquad \begin{cases} d\dfrac{\varkappa\beta_1}{\xi_2} = \omega' d\varepsilon, \\ d\dfrac{\varkappa\beta_2}{\xi_1} = \omega' d\varepsilon. \end{cases}$$

Es ist hier

$$(29)\qquad \frac{\varkappa\eta}{2\xi_1\beta_2} = \omega'$$

gesetzt, und $\varkappa$ ist wie früher eine universelle Konstante mit den Dimensionen des Quadrats einer Elektrizitätsmenge.

Analog mit Gleichung (13) haben die Gleichungen (28) eine Lösung von der Form

$$(30)\qquad \begin{cases} \varepsilon - \varepsilon_0 = (n+1)\,\omega'^n, \\ \dfrac{\varkappa\beta_1}{\xi_2} = \dfrac{\varkappa\beta_2}{\xi_1} = n\omega'^{n+1}. \end{cases}$$

n ist wieder entweder durchaus konstant oder verändert sich sprungweise in Flächen, wo $\omega' = 1$ ist.

Wenn wir wie p. 11 ein ruhendes Teilchen von radialer Symmetrie betrachten, haben wir

$$(31)\qquad \begin{cases} \xi_1 = -\Phi_e^2, \ \xi_2 = \Phi_w^2, \\ \eta = 2\left\{\left(\dfrac{d\Phi_w}{dr}\right)^2 - \left(\dfrac{d\Phi_e}{dr}\right)^2\right\}, \end{cases}$$

und anstatt der Gleichungen (23) erhalten wir die folgenden:

$$(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left(r^2\varepsilon\dfrac{d\Phi_e}{dr}\right) = -r^2\beta_1\Phi_e, \\ \dfrac{d}{dr}\left(r^2\varepsilon\dfrac{d\Phi_w}{dr}\right) = -r^2\beta_2\Phi_w. \end{cases}$$

Durch Einsetzen der Ausdrücke für β_1, β_2 und ε erhält man, wie im früheren Falle, zwei Differentialgleichungen für Φ_e und Φ_w, welche diese Grössen als Funktionen von r bestimmen. Integralausdrücke in geschlossener Form sind wohl nicht zu erhalten. Für grosse r gelten wie p. 13 die Reihenentwickelungen

$$\begin{cases} \Phi_e = 0 + \dfrac{e}{4\pi r} + \dots\dots \\ \Phi_w = \Phi_{w\infty} - \dfrac{M}{4\pi r} + \dots \end{cases}$$

Damit die Theorie wirklich zu einer atomistischen Struktur der Elektrizität und Materie führen soll, dürfen e und M nicht willkürliche Integrationskonstanten sein, und dies wird wieder dadurch erreicht, dass wir die Mittelpunkte der Elektronen und Atome als singuläre Punkte im Felde auffassen, und den Werten der Zustandsgrössen ξ_1, ξ_2, η in diesen Punkten zwei algebraische Bedingungen auferlegen. Dann werden e und M in ein- oder mehrdeutiger Weise durch zwei $\varkappa$ enthaltende Gleichungen bestimmt.

Wie die besonderen Bedingungen für die singulären Punkte lauten sollen, ist eine Frage, zu deren Beantwortung die Integration der Differentialgleichungen (32) erforderlich sein würde. Da uns dies nicht möglich ist, bleibt also hier in unserer Theorie eine grosse Lücke.

Wir wollen nun einige Einzelheiten der Theorie in Betracht ziehen. Was den Wert von n betrifft ist zu sagen, dass für ein durchaus konstantes n wohl die Werte $n=1$ und $n=\frac{1}{2}$ die plausiblesten sind [1]. Wie früher gezeigt, kann sich aber n in Flächen, wo $\omega'=1$, sprungweise verändern. Wir wollen untersuchen, ob dieser Fall plausiblerweise erreichbar ist. Nach den üblichen Theorien [2] ist der Elektronenradius von der Grössenordnung

$$a = 10^{-13}\ \text{cm}.$$

Wenn a diesen Wert hat, gelten auf der Elektronenoberfläche folgende Werte für die Feldgrössen:

[1] Auch der ganz besondere Fall $n = -1$ ist zu bemerken. Derselbe gibt für ε den konstanten Wert $\varepsilon_0 (=1)$.

[2] Vgl. z. B. M. Abraham. Theorie der Elektrizität II, p. 193 (Leipzig, 1905).

$$\Phi_e = \frac{e}{4\pi . 10^{\;\;13}} = 1{,}3 . 10^3,$$

$$\frac{d\Phi_e}{dr} = , - \frac{e}{4\pi . 10^{\;\;26}} = - 1{,}3 . 10^{16}.$$

(Die Einheiten sind g, cm, sek). Wir finden also in der Elektronenoberfläche η von der Grössenordnung -10^{32}, ξ_1 von der Grössenordnung -10^6, und ξ_2 (wie überall) von der Grössenordnung 10^{48} Damit $\omega' = 1$ sei, müsste also $\varkappa = \frac{2\xi_1\xi_2}{\eta}$ von der Grössenordnung 10^{22} sein. Dann ist aber ein enger Zusammenhang zwischen $\varkappa$ und

$$e^2 = 4\pi . (4{,}65)^2 . 10^{-20}$$

wohl nicht möglich. Die Forderung, dass $\varkappa$ das elektrische Elementarquantum e bestimmt, können wir indessen nicht gern aufgeben und müssen also sagen, dass die Annahme einer unstetigen Veränderung von n (wobei für $\omega' < 1$ $n = 0$ sein würde), so wünschenswerte Folgerungen sie einerseits auch hätte, doch andererseits ausserordentliche Schwierigkeiten mit sich bringt. Von der Annahme eines durchaus konstanten Wertes für n wird man einen besseren Erfolg für die Theorie hoffen. Leider stellen die Schwierigkeiten, die mit einer Integration der Differentialgleichungen (32) verknüpft sind, für die Weiterentwickelung der Theorie grosse Hindernisse in den Weg.

Als kurze Zusammenfassung ist zu sagen, dass es gelungen ist, für das physikalische Gesamtfeld allgemeine Feldgleichungen aufzustellen, in welchen eine universelle Konstante von den Dimensionen des elektrischen Elementarquantums (oder dessen Quadrats, das durch c dividiert die Dimensionen des Planckschen Wirkungsquantums hat) auftritt. Es scheint aber hierdurch noch nicht eine atomistische Struktur der Elektrizität und Materie aus der Theorie zu folgen, und deswegen wird angenommen, dass die Mittelpunkte der Elektronen und Atome singuläre Punkte sind, für welche ganz besondere Bedingungen gelten. Dann kann

die Theorie die Existenz diskreter Elementarteilchen erklären, aber die wichtige Frage, ob durch geeignete Wahl der unbestimmt gelassenen Konstanten und Bedingungen auch quantitativ richtige Resultate erhalten werden können, bleibt auf Grund der mathematischen Schwierigkeiten unbeantwortet.

Helsingfors, Mai 1915.